

# TRATAMENTO VETORIAL DA GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

**Elisabete Teresinha Guerato**  
Licenciada em Matemática – USP

**Luiz Gonzaga Xavier de Barros**  
Doutor em Matemática - USP

**Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIBAN**

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é analisar situações de ensino e aprendizagem de Geometria Analítica Plana sob um tratamento vetorial. Este estudo será realizado fundamentado na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (1995, 2000, 2003). Para a construção e condução do experimento de ensino será adotada a metodologia intitulada Engenharia Didática de Michèle Artigue (1996). Após uma análise prévia, serão aplicadas atividades num grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública em dois momentos: primeiramente na disciplina de Geometria Analítica Plana e, no semestre seguinte, na disciplina de Vetores e Geometria Analítica. Em seguida serão realizadas análises comparativas das produções discentes.

**Palavras chave:** Geometria Analítica Plana, Vetores, Registros de Representação Semiótica, Engenharia Didática.

## INTRODUÇÃO

Os estudantes têm contato com a Geometria Analítica Plana no final do Ensino Médio, quando essa disciplina é estudada na forma cartesiana. No Ensino Superior, em cursos de ciências exatas, estuda-se a Geometria Analítica Espacial, utilizando-se nesse caso um tratamento vetorial.

Essa mudança de tratamento é um dos fatores que fazem os estudantes não perceberem a transição, que deveria ser natural, da situação plana para a situação espacial. Isso suscita a indagação se a utilização de um tratamento vetorial na

Geometria Analítica Plana pode ser um facilitador no processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina, e, também, se esse tratamento pode tornar natural a transição de Geometria Analítica Plana para a Geometria Analítica Espacial.

Nesta pesquisa, pretende-se aplicar o tratamento vetorial na disciplina Geometria Analítica Plana em uma turma de segundo semestre do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino pública e acompanhá-los no semestre seguinte, na disciplina Vetores e Geometria Analítica. Serão aplicadas atividades aos estudantes nesses dois momentos e serão analisadas tanto as produções discentes e como as observações feitas no decorrer das aulas.

## **REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS**

A importância de um trabalho de exploração de diferentes representações de um mesmo objeto matemático é apresentada por Duval (1995, 2000, 2006) em sua teoria dos registros de representações semióticas.

Um sistema semiótico é um conjunto de signos articulados de modo a permitir alguma forma de comunicação. É no âmbito de um sistema semiótico que se produzem as representações semióticas de um objeto. A *produção* de uma representação de um objeto em um sistema semiótico é a primeira atividade cognitiva relacionada a essa representação. Se uma representação de um objeto é transformada em outra representação desse mesmo objeto dentro do mesmo sistema semiótico, diz-se que a representação sofreu uma transformação de *tratamento*. Essa é uma segunda atividade cognitiva relacionada a uma representação. Se, por outro lado, uma representação é transformada em outra representação que pertença a outro sistema semiótico, diz-se que a representação sofreu uma transformação de *conversão*. Esta é uma terceira atividade cognitiva relacionada a uma representação.

Duval chama de *registro de representações semióticas* um sistema semiótico que permita que suas representações possam sofrer esses três tipos de atividades cognitivas: a produção, o tratamento e a conversão. Portanto, nem todo sistema semiótico é necessariamente um registro de representações semióticas.

Na visão desse autor, esse tipo de abordagem é fundamental no caso da Matemática, pois não se consegue acessar um objeto matemático sem a utilização

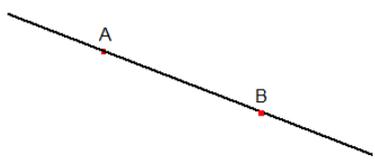
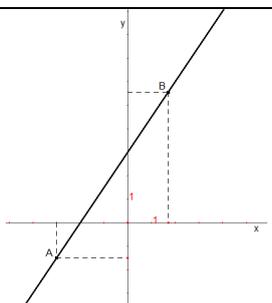
de uma representação semiótica desse objeto matemático. Ao mesmo tempo, para que não ocorra confusão entre um objeto matemático e uma de suas representações, é fundamental um trabalho de diversificação e coordenação de diferentes representações desse mesmo objeto em diferentes registros.

As representações que permitem algum tratamento na forma de algoritmos são chamadas *monofuncionais*. As que não permitem tal tratamento são chamadas *multifuncionais*. As representações que permitem algum tratamento na forma de discurso, oral ou escrito, são chamadas *discursivas*, e as que não permitem tal tratamento são chamadas *não discursivas*. Duval classificou os registros em quatro categorias, conforme as suas representações sejam monofuncionais discursivas, monofuncionais não discursivas, multifuncionais discursivas e multifuncionais não discursivas. O quadro 1 resume essa classificação.

	<i>Representações discursivas</i>	<i>Representações não-discursivas</i>
<i>Representações multifuncionais</i>	<b>Registros na Língua Natural</b>	<b>Registros do tipo Figural</b>
<i>Representações monofuncionais</i>	<b>Registros do tipo Simbólico</b>	<b>Registros do tipo Gráfico</b>

Quadro 1. Tipos de registros.

O quadro 2 mostra exemplos de oito representações  $R_1, R_2, \dots, R_8$  de um mesmo objeto matemático, no caso uma reta determinada por dois pontos distintos. Toda transformação de uma representação  $R_i$  para uma representação  $R_j$  com  $i \neq j$  para  $i = 1, 2, 3$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, 8$  é uma *conversão*. Toda transformação de uma representação  $R_i$  para uma representação  $R_j$  com  $i \neq j$  para  $i$  e  $j = 4, 5, 6, 7, 8$  é um *tratamento*.

		<b>Tipo do Registro</b>
<b>R<sub>1</sub></b>	Seja a reta determinada pelos pontos distintos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ .	Língua Natural
<b>R<sub>2</sub></b>		Figural
<b>R<sub>3</sub></b>		Gráfico
<b>R<sub>4</sub></b>	$X = A + t.(B - A)$ com $t \in \mathbb{R}$	Simbólico
<b>R<sub>5</sub></b>	$\begin{cases} x = x_A + t.(x_B - x_A) \\ y = y_A + t.(y_B - y_A) \end{cases} \text{ com } t \in \mathbb{R}$	Simbólico
<b>R<sub>6</sub></b>	$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} (= t)$	Simbólico
<b>R<sub>7</sub></b>	$(y_B - y_A).x + (x_A - x_B).y = (y_B - y_A).x_A + (x_A - x_B).y_A$	Simbólico
<b>R<sub>8</sub></b>	$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + y_A$	Simbólico

Quadro 2. Exemplos de oito representações semióticas de um mesmo objeto matemático em diferentes registros.

As conversões podem ser classificadas como congruentes ou não congruentes. Uma conversão congruente ocorre quando na comparação da representação do registro de partida com a representação final do registro de chegada, a transformação for a mais próxima de uma situação de simples codificação. De acordo com Duval (1995), a conversão será congruente quando:

- houver uma correspondência semântica entre as unidades significantes,
- houver uma mesma ordem de apreensão das unidades significantes nas duas representações,
- a cada unidade significativa da representação de partida corresponder pela conversão uma unidade significativa no registro de chegada.

Caso uma destas condições não ocorra, a conversão é classificada como não congruente.

Segundo Duval, não é dada a devida atenção ao fenômeno da congruência das conversões de representações nas pesquisas relacionadas à Educação Matemática. Na visão do autor, é essencial, para a aprendizagem matemática, o reconhecimento de conversões não congruentes e o domínio de uma efetiva coordenação entre os registros, pois são atividades que constituem condição de acesso à compreensão matemática.

## **HIPÓTESES DE PESQUISA E LEVANTAMENTO DE LITERATURA**

As hipóteses de pesquisa que serão testadas são que o tratamento vetorial da Geometria Analítica Plana é um facilitador do processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina, e que o tratamento vetorial da Geometria Analítica Plana facilita a introdução da Geometria Analítica Espacial.

Como o estudo dos vetores se apoia nas suas representações em diversos registros optou-se pela Teoria dos Registros de Representações Semióticas como referencial teórico. Assim na fase de revisão bibliográfica, serão importantes os artigos escritos por DUVAL (1995, 2000 e 2003) sobre essa teoria e algumas dissertações que abordaram o tema Geometria Analítica e Vetores e que utilizaram o mesmo referencial teórico, como CASTRO (2001) e GRANDE (2006).

## **OBJETIVOS DA PESQUISA**

O objetivo geral desta pesquisa é

- Contribuir para o aperfeiçoamento do processo de ensino e aprendizagem na disciplina Geometria Analítica, de modo que, esse processo possa ocorrer de um modo mais simples e mais efetivo.

Os objetivos específicos são

- Analisar a viabilidade do ensino da Geometria Analítica Plana com um tratamento vetorial,
- Verificar se esse procedimento será um elemento facilitador do processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica Plana, e quais são as suas consequências no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica Espacial.

## **JUSTIFICATIVA**

Quando um estudante ingressa no Ensino Superior num curso de Ciências Exatas e começa o estudo da Geometria Analítica Vetorial, geralmente não consegue ver um vínculo entre essa disciplina e a Geometria Analítica Plana estudada no Ensino Médio. Embora algumas vezes, no Ensino Médio, tenha tomado contato com o conceito de vetor em disciplinas como a Física Geral, ele também não consegue relacionar o conceito de vetor com a Geometria Analítica Plana.

Muitas das demonstrações feitas na Geometria Analítica Plana, quando tratada de modo cartesiano, podem ficar mais simples se for dado um tratamento vetorial. Por exemplo, é mais fácil provar que duas retas são paralelas exibindo seus vetores diretores do que procurando seus coeficientes angulares.

A proposta deste trabalho é verificar a viabilidade de se introduzir a Geometria Analítica Plana no Ensino Médio com um tratamento vetorial com o intuito de tornar as demonstrações mais simples e, também, para preparar o estudante para a disciplina de Vetores e Geometria Analítica do Ensino Superior.

## METODOLOGIA

A metodologia que será utilizada é a da Engenharia Didática, criada por Michèle Artigue (ARTIGUE, (1988)). Essa metodologia é uma das abordagens da Didática da Matemática que se caracteriza como uma forma particular de organizar os procedimentos metodológicos de pesquisas desenvolvidas no contexto de sala de aula. A propósito do termo *Engenharia Didática*, Artigue (1988) afirma:

*“Esse termo foi cunhado para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e, portanto a enfrentar praticamente, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta”.*

A Engenharia Didática é considerada uma pesquisa empírica, pois considera as situações pesquisadas como sendo laboratórios (sala de aula, material didático, escola, etc.). Ela é composta por uma sequência de atividades propostas por um professor-engenheiro articuladas de forma a comprovar, ou não, hipóteses inicialmente formuladas. Nessa metodologia, sequências de ensino são concebidas, realizadas, observadas e analisadas. Para a análise levam-se em consideração as complexas situações ocorridas em sala de aula e também os fenômenos ligados às situações de ensino e aprendizagem.

Essa metodologia prevê quatro fases articuladas entre si:

- análise preliminar para levantar os conhecimentos pressupostos
- concepção e análise *a priori* de uma sequência didática
- aplicação da sequência didática
- análise *a posteriori* da sequência didática aplicada para validação do processo.

No caso desta pesquisa, na fase da análise preliminar será feito um estudo acerca das dificuldades que os estudantes encontram ao se abordar a Geometria Analítica Plana com um tratamento cartesiano. A sequência didática será elaborada

e aplicada com a finalidade de se trabalhar sobre essas dificuldades a partir do tratamento vetorial da disciplina e a análise a posteriori será feita para verificar se esse tipo de tratamento pode ou não ajudar na aprendizagem dessa disciplina no Ensino Médio.

A pesquisa será realizada numa instituição pública de Ensino Superior, que mantém cursos de Ensino Médio integrado ao Ensino Técnico, cursos de Licenciatura em Matemática, Física, Química, Ciências Biológicas e Geografia, cursos de Engenharia e cursos de Tecnologia.

Os sujeitos da pesquisa serão estudantes do segundo semestre do curso de Licenciatura em Matemática que compõem uma turma da disciplina Geometria Analítica. Os dados serão coletados no decorrer do semestre letivo, com ênfase na parte inicial do curso, anterior ao estudo de retas, o que possibilitará um melhor trânsito entre os vetores e Geometria Analítica. Uma nova coleta de dados será feita no semestre seguinte quando a mesma turma cursará a disciplina de Vetores e Geometria Analítica.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Esta pesquisa visa conhecer os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem da Geometria Analítica Plana no Ensino Médio, e uma nova abordagem será testada. Se a hipótese de pesquisa se verificar, estarão criadas condições para se propor uma mudança de abordagem didática da Geometria Analítica Plana no Ensino Médio.

## **REFERÊNCIAS**

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. *Recherches em Didactique des Mathématiques (RDM)*. Grenoble, France, v.9, n.3, p. 281-308.

Castro, S. C.(2001). Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine - Registres sémiotiques et apprentissage intellectuel*, Berna: Peter Lang.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24, 2000, Hiroshima. *Proceedings of the 24<sup>th</sup> PME*. Hiroshima: Department of Mathematics Education Hiroshima University. p. 55-69.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S.D.A. *Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus. p. 11-33.

Grande, A. L. (2006). O Conceito de Independência e Dependência Linear e os Registros de Representação Semiótica nos Livros Didáticos de Álgebra Linear. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP.